

Nota de Aula

Medidas de Dispersão e Forma das Distribuições

Sumário

Objetivos de Aprendizagem	3
1 Introdução	4
2 Variabilidade	4
3 Amplitude	5
4 Desvio Médio	5
5 Variância	6
5.1 Por que o quadrado?	6
5.2 Variância populacional	6
5.3 Variância amostral	6
5.4 Por que $(n - 1)$ e não n ? Graus de liberdade	6
6 Desvio Padrão	8
6.1 Interpretação física e Regra Empírica	8
7 Coeficiente de Variação	9
7.1 Interpretação usual	9
7.2 Aplicações	10
8 Propriedades da variância e do desvio padrão	10
9 Medidas de dispersão para dados agrupados	11
9.1 Média, variância e desvio padrão	11
10 Parte II — Forma das Distribuições	13
11 Assimetria	13
11.1 Distribuição simétrica	13
11.2 Assimetria positiva	13
11.3 Assimetria negativa	13
12 Curtose	14
13 Momentos e medidas de forma	15
14 Quartis	15
14.1 Boxplot	16
15 Decis	16
16 Percentis	17
16.1 Métodos de cálculo dos quartis	17
17 Relação entre Quartis, Decis e Percentis	17
18 Resumo da Aula	18

19 Síntese: análise comparativa completa	20
20 Exercícios Propostos	21
21 Gabaritos Comentados	23
Referências	24

Objetivos de Aprendizagem

Ao final desta aula, o estudante deverá ser capaz de:

1. **Justificar** por que medidas de posição são insuficientes para descrever um conjunto de dados, comparando conjuntos de mesma média.
2. **Calcular** amplitude, desvio médio, variância (populacional e amostral) e desvio padrão para dados não agrupados.
3. **Explicar** o significado dos graus de liberdade e o uso de $(n - 1)$ na variância amostral.
4. **Interpretar** fisicamente o desvio padrão e aplicá-lo à Regra Empírica (68–95–99,7%).
5. **Calcular e interpretar** o coeficiente de variação para comparar conjuntos de unidades distintas.
6. **Classificar** uma distribuição quanto à assimetria (simétrica, positiva, negativa) e à curtose (meso/lepto/platicúrtica).
7. **Determinar** quartis, decis e percentis e estabelecer as equivalências entre eles.
8. **Construir e interpretar** um *boxplot* para identificar dispersão e *outliers*.

Pré-requisitos

- Conceitos de *população*, *amostra*, *variável* e tipos de variáveis (qualitativas/quantitativas).
- *Medidas de tendência central* (média, mediana, moda) — Nota de Aula 3.
- Operações básicas com somatórios (Σ) e notação de índices.
- Noções de gráficos para dados quantitativos (histograma, ramo-e-folhas).

1 Introdução

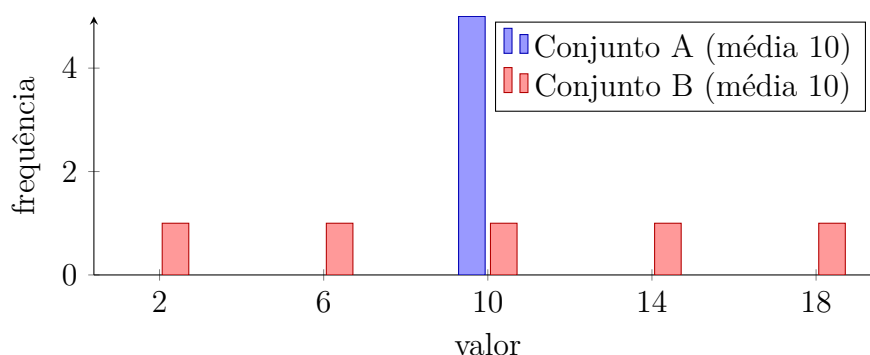
Na aula anterior estudamos as **medidas de tendência central** — média, mediana e moda —, que fornecem um valor representativo do conjunto de dados. Entretanto, dois conjuntos podem possuir exatamente a mesma média e, ainda assim, serem completamente diferentes.

Exemplo 1.1. Considere os conjuntos

$$A = \{10, 10, 10, 10, 10\}, \quad B = \{2, 6, 10, 14, 18\}.$$

Ambos possuem média igual a 10. Apesar disso, observa-se claramente que o conjunto A apresenta pouca variação (todos os valores são iguais à média), enquanto o conjunto B possui valores bastante espalhados.

Essa diferença é capturada pelas chamadas **medidas de dispersão**, que quantificam o quanto os dados se afastam de um valor central. Medidas de posição e medidas de dispersão são *complementares*: juntas descrevem adequadamente o comportamento de um conjunto de observações.



Distribuições com a mesma média (10), porém com variabilidades muito distintas.

Observação 1.1. Historicamente, o desenvolvimento sistemático das medidas de dispersão ocorreu no século XIX, com os trabalhos de **Francis Galton** (que introduziu o conceito de quartis e percentis) e **Karl Pearson** (responsável pelo desvio padrão moderno e pelos coeficientes de assimetria e curtose). A variância, como quadrado do desvio, foi popularizada por **R. A. Fisher** no início do século XX, no contexto da Análise de Variância.

2 Variabilidade

A **variabilidade** representa o quanto os dados se afastam de um valor central.

- Quanto **menor** a variabilidade, mais *homogêneos* são os dados e maior é a consistência das observações.
- Quanto **maior** a variabilidade, maior é a dispersão e mais *heterogêneos* são os dados.

Diversas medidas podem ser utilizadas para quantificar essa dispersão: amplitude, desvio médio, variância, desvio padrão e coeficiente de variação, estudados a seguir.

3 Amplitude

Definição 3.1 (Amplitude). A amplitude é a diferença entre o maior e o menor valor observado:

$$A = x_{\max} - x_{\min}. \quad (1)$$

Exemplo 3.1. Para os dados 3, 5, 8, 10, 14:

$$A = 14 - 3 = 11.$$

Observação 3.1. Vantagens: cálculo simples e imediato.

Desvantagens: utiliza apenas dois valores da amostra e é *extremamente sensível* a valores extremos (*outliers*), ignorando toda a informação contida nos demais dados.

4 Desvio Médio

O **desvio médio** mede a distância média entre cada observação e a média aritmética.

Definição 4.1 (Desvio médio).

$$DM = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|, \quad (2)$$

em que $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x_i$.

Por que o módulo? Observe que a soma dos desvios com sinal é sempre nula:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - \sum x_i = 0. \quad (3)$$

Logo, tomar a média dos desvios com sinal resultaria sempre em zero, não fornecendo informação sobre a dispersão. O uso do *valor absoluto* elimina o cancelamento e fornece uma medida positiva da distância média.

Exemplo 4.1. Sejam $x = \{2, 4, 6, 8\}$. A média é $\bar{x} = 5$. Os desvios absolutos:

$$|2 - 5|, |4 - 5|, |6 - 5|, |8 - 5| = 3, 1, 1, 3.$$

Portanto:

$$DM = \frac{3 + 1 + 1 + 3}{4} = \frac{8}{4} = 2.$$

Interpretação: em média, cada observação dista 2 unidades da média.

Exemplo 4.2. Para tornar o cálculo sistemático, organize os passos em uma tabela. Considere $x = \{12, 15, 18, 20, 25\}$. $\bar{x} = \frac{90}{5} = 18$.

$$DM = \frac{18}{5} = 3,6 \quad (\text{distância média à média}).$$

$$s^2 = \frac{98}{4} = 24,5 \Rightarrow s = \sqrt{24,5} \approx 4,95.$$

Note que a soma dos desvios com sinal é *sempre zero* (última coluna parcial), confirmando a necessidade do módulo ou do quadrado para medir dispersão.

Observação 4.1. O desvio médio é **pouco sensível** a *outliers* quando comparado à amplitude, mas usa valor absoluto, que é mais difícil de manipular algebricamente (não é diferenciável na origem). Por isso, prefere-se a variância como medida-padrão.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$ x_i - \bar{x} $	$(x_i - \bar{x})^2$
1	12	-6	6	36
2	15	-3	3	9
3	18	0	0	0
4	20	2	2	4
5	25	7	7	49
Σ	90	0	18	98

5 Variância

A **variância** é uma das medidas mais importantes da Estatística. Ela mede o espalhamento dos dados em torno da média, utilizando o *quadrado* dos desvios.

5.1 Por que o quadrado?

A ideia central consiste em calcular o desvio de cada observação em relação à média ($x_i - \bar{x}$). Como a soma desses desvios é sempre zero (equação 3), evita-se o cancelamento *elevando cada desvio ao quadrado*. Além disso:

- O quadrado *penaliza mais* desvios grandes do que pequenos, enfatizando observações distantes da média.
- O uso do quadrado (em vez do módulo) preserva a diferenciabilidade, o que é essencial para a Inferência Estatística e para a dedução de propriedades analíticas.

5.2 Variância populacional

Definição 5.1 (Variância populacional).

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2, \quad (4)$$

em que N é o tamanho da população e μ a média populacional.

5.3 Variância amostral

Definição 5.2 (Variância amostral).

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (5)$$

5.4 Por que $(n-1)$ e não n ? Graus de liberdade

Quando usamos $\bar{x}$ (a média amostral) em vez de μ (a média populacional), os n desvios $x_i - \bar{x}$ *não são independentes*: eles satisfazem à restrição $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$. Logo, só podemos escolher *livremente* $n-1$ valores; o último é determinado pela média. Diz-se que há $n-1$ **graus de liberdade**.

Além disso, dividir por n produziria um estimador *viesado* (tende a subestimar a variância populacional, já que os dados amostrais costumam estar mais próximos da

própria média $\bar{x}$ do que de μ). A divisão por $n - 1$ conduz a um estimador **não viesado** de σ^2 , do ponto de vista da inferência clássica.

Exemplo 5.1. Sejam $x = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. A média é $\bar{x} = 6$. Os quadrados dos desvios:

$$(2 - 6)^2, (4 - 6)^2, (6 - 6)^2, (8 - 6)^2, (10 - 6)^2 = 16, 4, 0, 4, 16.$$

Soma = 40. Então

$$s^2 = \frac{40}{n - 1} = \frac{40}{4} = 10, \quad \sigma^2 = \frac{40}{5} = 8.$$

Observação 5.1. Existe uma **fórmula computacional** equivalente e útil para o cálculo manual:

$$s^2 = \frac{1}{n - 1} \left(\sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right), \quad (6)$$

Demonstração. Expandindo o quadrado do desvio:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2) \\ &= \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Como $\sum x_i = n\bar{x}$, substituindo em (7):

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - n\bar{x}^2. \quad (8)$$

Mas $n\bar{x}^2 = n \left(\frac{\sum x_i}{n} \right)^2 = \frac{(\sum x_i)^2}{n}$, logo

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n},$$

que, dividido por $n - 1$, conduz à equação (6). ■

Observação 5.2. A fórmula (6) é numericamente mais estável quando os cálculos são feitos manualmente a partir de uma tabela, pois exige apenas o acúmulo de $\sum x_i$ e $\sum x_i^2$ — sem recalculer os desvios em relação a $\bar{x}$. Em softwares modernos, prefere-se a forma direta, mais robusta a erros de arredondamento.

Exemplo 5.2. Para $x = \{4, 8, 12, 16, 20\}$ (mesma média $\bar{x} = 12$), usemos a fórmula computacional:

$$\sum x_i = 60, \quad \sum x_i^2 = 16 + 64 + 144 + 256 + 400 = 880.$$

$$s^2 = \frac{1}{4} \left(880 - \frac{60^2}{5} \right) = \frac{1}{4} (880 - 720) = \frac{160}{4} = 40,$$

o que confere com o cálculo direto. Logo $s = \sqrt{40} \approx 6,32$.

6 Desvio Padrão

Como a variância possui unidade ao quadrado (por exemplo, cm^2 ou kg^2), torna-se difícil interpretá-la diretamente. Define-se então o **desvio padrão** como a raiz quadrada (positiva) da variância, retornando à unidade original dos dados.

Definição 6.1 (Desvio padrão).

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (x_i - \mu)^2}, \quad (9)$$

para a população, e

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum (x_i - \bar{x})^2}, \quad (10)$$

para a amostra.

Exemplo 6.1. No exemplo anterior, $s^2 = 10$, portanto

$$s = \sqrt{10} \approx 3,16.$$

Exemplo 6.2. Considere tempos (em segundos) $x = \{8, 9, 10, 11, 12\}$. $\bar{x} = 10$.

$$\sum x_i^2 = 64 + 81 + 100 + 121 + 144 = 510; \quad \sum x_i = 50.$$

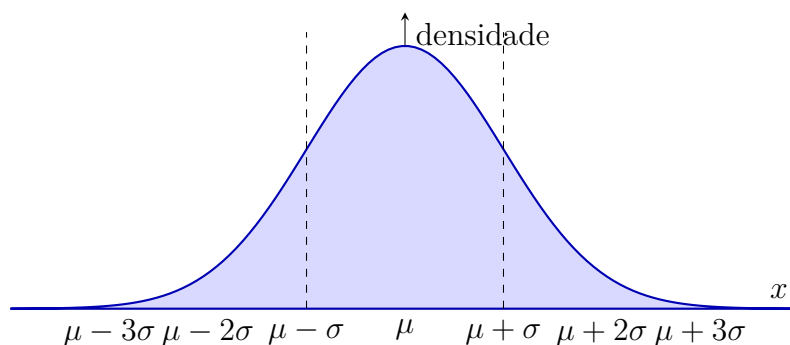
$$s^2 = \frac{1}{4} \left(510 - \frac{2500}{5} \right) = \frac{1}{4} (510 - 500) = 2,5 \Rightarrow s \approx 1,58 \text{ s}.$$

Para essa variável (próxima da simetria), supondo normalidade: 68% dos tempos estão em $10 \pm 1,58 = [8,42; 11,58]$; 95% em $10 \pm 3,16 = [6,84; 13,16]$. Os dados observados estão todos dentro destes intervalos, o que é consistente.

6.1 Interpretação física e Regra Empírica

O desvio padrão indica a *ordem de grandeza* típica das flutuações dos dados em torno da média. Para distribuições **aproximadamente normais** (simétricas e em formato de sino), vale a **Regra Empírica**:

- Cerca de **68%** dos dados estão no intervalo $\mu \pm \sigma$.
- Cerca de **95%** dos dados estão no intervalo $\mu \pm 2\sigma$.
- Cerca de **99,7%** dos dados estão no intervalo $\mu \pm 3\sigma$.



Regra Empírica para a distribuição normal.

Observação 6.1. A Regra Empírica *não* se aplica a distribuições fortemente assimétricas. Para qualquer distribuição (qualquer formato), no entanto, vale a **Desigualdade de Tchebycheff**:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}, \quad k > 0. \quad (11)$$

Equivalentemente, ao menos a fração $1 - 1/k^2$ dos dados está no intervalo $\mu \pm k\sigma$.

Para $k = 2$: ao menos 75% dos dados em $\mu \pm 2\sigma$.

Para $k = 3$: ao menos 88,9% dos dados em $\mu \pm 3\sigma$.

Como Tchebycheff vale *sempre*, é um resultado *conservador*: para distribuições normais, as frações reais (95% e 99,7%) excedem os limites de Tchebycheff.

Exemplo 6.3. Alturas de uma população têm $\mu = 170$ cm e $\sigma = 8$ cm. Pela Regra Empírica (supondo normalidade): $\approx 95\%$ em $[154; 186]$. Pela Desigualdade de Tchebycheff (sem suposição de forma): ao menos 75% em $[154; 186]$ (com $k = 2$). A Regra Empírica proporciona estimativas mais precisas, mas *exige* normalidade aproximada.

7 Coeficiente de Variação

O desvio padrão depende da unidade de medida: s em centímetros não é diretamente comparável a s em quilogramas, e dois conjuntos com médias muito diferentes podem ter desvios padrão distintos apenas por causa da escala.

Definição 7.1 (Coeficiente de variação).

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} \times 100\%. \quad (12)$$

O CV é uma medida *adimensional*, permitindo comparar a dispersão relativa de conjuntos com unidades ou escalas distintas.

7.1 Interpretação usual

- $CV \lesssim 10\%$: **baixa** dispersão (dados homogêneos).
- $10\% < CV < 30\%$: dispersão **média**.
- $CV \gtrsim 30\%$: dispersão **elevada** (dados heterogêneos).

Esses limites são convenções prática; o critério final depende da área de aplicação.

Exemplo 7.1. Considere as medidas de altura e massa de um grupo de indivíduos:

$$\bar{h} = 170 \text{ cm}, s_h = 8 \text{ cm} \Rightarrow CV_h = \frac{8}{170} \times 100\% \approx 4,7\%.$$

$$\bar{m} = 70 \text{ kg}, s_m = 9 \text{ kg} \Rightarrow CV_m = \frac{9}{70} \times 100\% \approx 12,9\%.$$

Embora $s_m > s_h$, a *variabilidade relativa* é maior para a massa. Não seria possível concluir isso apenas comparando s_h e s_m .

7.2 Aplicações

O CV é largamente empregado em:

- **Controle de qualidade:** comparar a precisão de processos com escalas distintas.
- **Experimentos científicos:** avaliar a reprodutibilidade de medidas.
- **Física Experimental:** quantificar a incerteza relativa de instrumentos.
- **Pesquisas educacionais:** comparar a variabilidade de notas entre turmas diferentes.

Observação 7.1. Cuidados no uso do CV .

- Exige uma variável de razão (com zero absoluto): não aplicar a temperatura Celsius (zero convencional) nem a escores em escala arbitrária.
- Para médias *muito próximas de zero*, o CV explode — tornando-se instável; evite-o nesses casos.
- Não substitui o desvio padrão: CV mede *dispersão relativa*, não absoluta. Use ambos quando relevante.

Exemplo 7.2. Dois instrumentos de medição de concentração (mg/L) reportam, para a mesma amostra padrão:

$$I_1 : \bar{x} = 10,0, s = 0,2 \Rightarrow CV_1 = 2\%. \quad I_2 : \bar{x} = 250, s = 8 \Rightarrow CV_2 = 3,2\%.$$

Embora I_2 tenha desvio padrão *absoluto* muito maior, sua dispersão *relativa* é só 60% maior. Para controle de qualidade em escalas tão distintas, o CV é a medida adequada para julgar a precisão dos instrumentos.

Tabela 1: Tabela-resumo das medidas de dispersão.

Medida	O que mede	Unidade
Amplitude	Espalhamento total	Sim
Desvio médio	Distância média	Sim
Variância	Dispersão quadrática	Unidade ²
Desvio padrão	Dispersão	Mesma unidade
Coefficiente de variação	Dispersão relativa	%

8 Propriedades da variância e do desvio padrão

A variância e o desvio padrão possuem propriedades operatórias importantes, que justificam seu uso em Inferência e em transformações de variáveis.

Definição 8.1 (Propriedades). Para constantes a e b e uma variável X :

1. **Translação:** somar (ou subtrair) uma constante *não altera* a dispersão.

$$\text{Var}(X + b) = \text{Var}(X), \quad \text{DP}(X + b) = \text{DP}(X).$$

2. **Escala:** multiplicar por uma constante afeta a variância pelo *quadrado* do fator e o desvio padrão pelo *valor absoluto* do fator.

$$\text{Var}(aX) = a^2 \text{Var}(X), \quad \text{DP}(aX) = |a| \text{DP}(X).$$

3. **Combinada:** $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Exemplo 8.1. Considere temperaturas em graus Celsius com $s_C = 10^\circ\text{C}$. Convertendo para Fahrenheit, $F = 1,8C + 32$:

$$s_F = 1,8 s_C = 18^\circ\text{F}, \quad s_F^2 = 1,8^2 s_C^2 = 324.$$

Note que 32 (translação) não afeta a dispersão.

Observação 8.1. A propriedade de escala mostra por que o **coeficiente de variação é invariante por mudança de escala**: se $Y = aX$ (com $a > 0$), então $\bar{Y} = a\bar{X}$ e $s_Y = a s_X$, de modo que

$$CV_Y = \frac{s_Y}{\bar{Y}} = \frac{a s_X}{a \bar{X}} = \frac{s_X}{\bar{X}} = CV_X.$$

Já a translação *altera* o *CV* (porque a média muda, mas s não). Por isso, *CV* só faz sentido para variáveis *razão* (com zero absoluto), e não para variáveis de intervalo como temperatura Celsius.

9 Medidas de dispersão para dados agrupados

Quando os dados são apresentados em uma **distribuição de frequências**, as fórmulas simples não se aplicam diretamente: cada valor x_i representa um *intervalo de classe* e tem uma *frequência* f_i . Nesses casos, trabalhamos com os **pontos médios** das classes.

9.1 Média, variância e desvio padrão

Sejam k classes, com pontos médios p_i e frequências absolutas n_i ($\sum n_i = n$).

Definição 9.1 (Média amostral agrupada).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i p_i. \quad (13)$$

Definição 9.2 (Variância amostral agrupada).

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k n_i (p_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum n_i p_i^2 - \frac{(\sum n_i p_i)^2}{n} \right). \quad (14)$$

O desvio padrão agrupado é $s = \sqrt{s^2}$.

Exemplo 9.1. A tabela a seguir apresenta a distribuição de notas de 50 estudantes.

Média: $\bar{x} = 262/50 = 5,24$.

Variância (amostral):

$$s^2 = \frac{1}{49} \left(1618 - \frac{262^2}{50} \right) = \frac{1}{49} \left(1618 - \frac{68644}{50} \right) = \frac{1}{49} (1618 - 1372,88) = \frac{245,12}{49} \approx 5,00.$$

Logo $s \approx \sqrt{5} \approx 2,24$ notas.

$CV \approx 2,24/5,24 \approx 42,7\%$ — dispersão relativamente elevada.

Classe	p_i (nota)	n_i	$n_i p_i$	p_i^2	$n_i p_i^2$
[0, 2)	1	4	4	1	4
[2, 4)	3	10	30	9	90
[4, 6)	5	18	90	25	450
[6, 8)	7	12	84	49	588
[8, 10]	9	6	54	81	486
Total	—	50	262	—	1618

Observação 9.1. Os valores obtidos a partir de dados agrupados são *aproximações* dos valores exatos. Ao agrupar, perdeu-se a variabilidade *dentro* de cada classe (que é contemplada apenas pelo ponto médio), de modo que s_{grup}^2 tende a *superestimar* levemente a variância verdadeira. Quanto menores as amplitudes das classes, melhor a aproximação.

10 Parte II — Forma das Distribuições

Até agora estudamos apenas *quanto* os dados variam. Vamos agora descrever *como* eles se distribuem, por meio das medidas de **forma**: assimetria e curtose, além das **separatrizes** (quartis, decis e percentis).

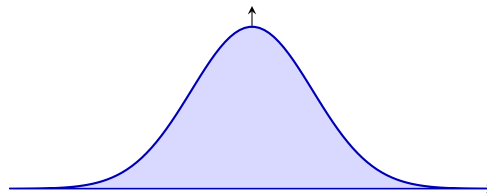
11 Assimetria

Nem toda distribuição é simétrica. A **assimetria** (ou *obliquidade*) mede a falta de simetria na distribuição dos dados.

11.1 Distribuição simétrica

Em uma distribuição simétrica, a média, a mediana e a moda *coincidem*:

$$\text{média} = \text{mediana} = \text{moda}.$$

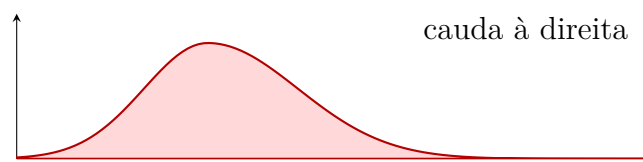


11.2 Assimetria positiva

A cauda mais longa se estende à *direita* (valores maiores). Neste caso:

$$\text{moda} < \text{mediana} < \text{média}.$$

Isso ocorre porque os valores extremos à direita *pullam* a média para cima. Exemplos: distribuição de renda, tempos de espera em filas.

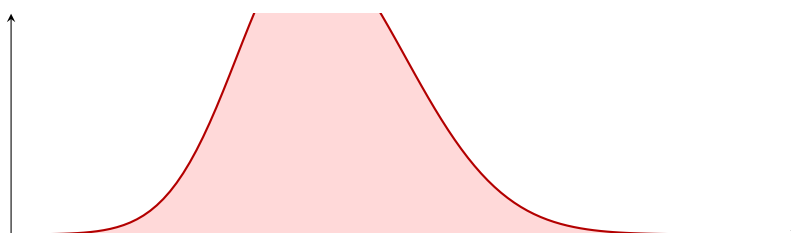


11.3 Assimetria negativa

A cauda mais longa se estende à *esquerda* (valores menores). Neste caso:

$$\text{média} < \text{mediana} < \text{moda}.$$

Exemplos: notas de uma prova muito fácil, idade de aposentadoria.



Observação 11.1. Existem coeficientes numéricos para quantificar a assimetria, como o **Coeficiente de Pearson**:

$$As = \frac{3(\bar{x} - \text{Med})}{s},$$

ou o **Coeficiente Momento de Assimetria**:

$$g_1 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^3}{s^3}.$$

$As > 0$ indica assimetria positiva; $As < 0$, negativa; $As \approx 0$, simetria.

Exemplo 11.1. Considere a distribuição de salários (em salários-mínimos) de uma empresa: média = 3,2; mediana = 2,0; moda = 1,5; $s = 2,4$. O Coeficiente de Pearson é

$$As = \frac{3(\bar{x} - \text{Med})}{s} = \frac{3(3,2 - 2,0)}{2,4} = \frac{3,6}{2,4} = 1,5 > 0.$$

Confirma-se assimetria **positiva** (a pequena parcela de salários altos puxa a média para cima).

Exemplo 11.2. Em uma turma onde a maioria foi bem (prova fácil), obtém-se média = 7,8, mediana = 8,2, moda = 8,8, com $s = 1,5$:

$$As = \frac{3(7,8 - 8,2)}{1,5} = \frac{-1,2}{1,5} = -0,8 < 0.$$

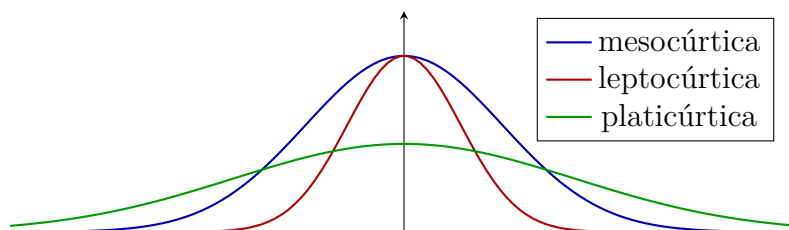
Distribuição **negativamente** assimétrica, com cauda à esquerda (poucas notas baixas).

12 Curtose

A **curtose** mede o grau de concentração dos dados em torno da média, ou seja, o “afinamento” do pico da distribuição.

Definição 12.1 (Classificação quanto à curtose). • **Mesocúrtica**: distribuição de pico moderado, semelhante à normal.

- **Leptocúrtica**: distribuição de pico alto e caudas leves — dados muito concentrados em torno da média.
- **Platicúrtica**: distribuição achatada, com pico baixo e caudas mais espessas — dados mais espalhados.



Observação 12.1. O coeficiente de curtose padronizado é

$$g_2 = \frac{\frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^4}{s^4} - 3.$$

Para a normal, $g_2 = 0$. $g_2 > 0$ indica leptocurtose; $g_2 < 0$, platicurtose.

13 Momentos e medidas de forma

As medidas de assimetria e curtose podem ser expressas de forma unificada por meio dos **momentos** da distribuição.

Definição 13.1 (Momento central de ordem r).

$$m_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^r. \quad (15)$$

Vejamos os casos particulares:

- $m_1 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x}) = 0$ (a soma dos desvios é nula).
- $m_2 = \frac{1}{n} \sum (x_i - \bar{x})^2$ — variância *populacional* (denominador n).
- m_3 — base da assimetria. O coeficiente de assimetria de Fisher é $g_1 = m_3/s^3$.
- m_4 — base da curtose. A curtose de Fisher é $g_2 = m_4/s^4 - 3$.

Observação 13.1. A subtração de 3 no coeficiente de curtose aparece porque a distribuição *normal* possui exatamente $m_4/s^4 = 3$. Assim, comparar com a normal é natural: $g_2 = 0$ para uma curva mesocúrtica (equiparável à normal).

Exemplo 13.1. Para os dados $x = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $\bar{x} = 6$, $s \approx 3,16$ (variância amostral 10).

$m_3 = \frac{(-8)+(-1)+0+1+8}{5} = 0 \Rightarrow g_1 = 0$ (simétrica, como esperado).

$m_4 = \frac{16+1+0+1+16}{5} = \frac{34}{5} = 6,8$. Usando s^4 (com denominador n , $\sigma^4 = 8^2 = 64$), $m_4/\sigma^4 = 6,8/64 \approx 0,106$, muito abaixo de 3 — o que indica forte platicurtose, como esperado para um conjunto tão pequeno.

Observação 13.2. Os momentos amostrais são estimadores *viciados* de momentos populacionais quando usamos divisor n ; em amostras pequenas, g_1 e g_2 exigem correções (por exemplo, a correção $g_1^* = \sqrt{n(n-1)} g_1/(n-2)$). Essas correções são apresentadas em cursos de Inferência.

14 Quartis

Os **quartis** dividem o conjunto de dados ordenado em *quatro partes iguais*.

Definição 14.1 (Quartis). Sejam $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ os dados ordenados.

- Q_1 : primeiro quartil — valor que deixa 25% dos dados abaixo dele.
- Q_2 : segundo quartil — coincide com a **mediana** (deixa 50% dos dados abaixo).
- Q_3 : terceiro quartil — valor que deixa 75% dos dados abaixo dele.

O **amplitude interquartilica** (IIQ) é uma medida de dispersão robusta:

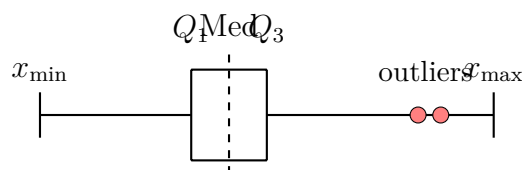
$$IIQ = Q_3 - Q_1. \quad (16)$$

Exemplo 14.1. Sejam $x = \{3, 5, 8, 10, 14, 16, 20, 22\}$ (já ordenados, $n = 8$).

- $Q_2 = \text{mediana} = \frac{x_{(4)} + x_{(5)}}{2} = \frac{10 + 14}{2} = 12$.
- Para Q_1 : mediana da metade inferior $\{3, 5, 8, 10\} \Rightarrow Q_1 = \frac{5 + 8}{2} = 6,5$.
- Para Q_3 : mediana da metade superior $\{14, 16, 20, 22\} \Rightarrow Q_3 = \frac{16 + 20}{2} = 18$.
- $IIQ = 18 - 6,5 = 11,5$.

14.1 Boxplot

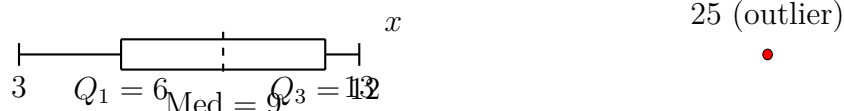
O *boxplot* (diagrama de caixa) é uma representação gráfica que utiliza mediana, quartis e *los bigodes* (*whiskers*) para mostrar dispersão, simetria e *outliers*.



Observação 14.1. Um ponto x é frequentemente classificado como *outlier* quando

$$x < Q_1 - 1,5 IIQ \quad \text{ou} \quad x > Q_3 + 1,5 IIQ.$$

Exemplo 14.2. Para $x = \{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 25\}$ ($n = 11$):
 Mediana = 9 (6º valor). Q_1 (mediana de $\{3, 5, 6, 7, 8\}$) = 6; Q_3 (mediana de $\{10, 11, 12, 13, 25\}$) = 12. $IIQ = 6$.
 Limites: $\inf = 6 - 9 = -3$; $\sup = 12 + 9 = 21$. Logo 25 é *outlier*; $x_{\min}$ (sem *outlier*) = 3; $x_{\max}$ (sem *outlier*) = 13.



Leitura do boxplot: a caixa concentra os 50% centrais dos dados; o traço interno é a mediana; os “bigodes” alcançam até os valores extremos (sem *outliers*); qualquer ponto além dos limites é marcado isoladamente. A *simetria* da caixa em torno da mediana e o tamanho dos bigodes indicam a *forma* da distribuição.

15 Decis

Os **decis** dividem os dados ordenados em *dez* partes iguais. Existem 9 decis, $D_1, D_2, \dots, D_9$, onde D_k deixa $10k\%$ dos dados abaixo de si.

Exemplo 15.1. Na distribuição do exemplo anterior ($n = 8$, $D_5 = \text{mediana} = 12$). Para D_1 , posição $\frac{10 \cdot 1}{100} \cdot 8 = 0,8 \Rightarrow$ entre $x_{(1)} = 3$ e $x_{(2)} = 5$, interpolação linear:

$$D_1 = x_{(1)} + 0,8(x_{(2)} - x_{(1)}) = 3 + 0,8(2) = 4,6.$$

16 Percentis

Os **percentis** dividem os dados em *cem* partes iguais. Existem 99 percentis $P_1, P_2, \dots, P_{99}$, em que P_k deixa $k\%$ dos dados abaixo de si.

Definição 16.1 (Posição do percentil). Uma das regras usuais para a posição do percentil P_k é

$$\text{posição}_k = \frac{k}{100}(n), \quad (17)$$

Efetua-se interpolação linear caso a posição não seja inteira.

Observação 16.1. Aplicações dos percentis: ENEM e vestibulares, concursos públicos, exames médicos, curvas de crescimento infantil, testes de QI e avaliações educacionais. Falar que um estudante está no “percentil 85 do ENEM”, significa que 85% dos participantes obtiveram nota inferior à dele.

Exemplo 16.1. Em uma prova, 800 candidatos obtêm notas entre 0 e 1000. Deseja-se o percentil 90, ou seja, a nota P_{90} tal que 90% dos 800 candidatos ($= 720$) obtêm nota inferior. Equivale à 720ª maior nota — que na prática é a 81ª maior nota (na ordem decrescente). Ordenando de forma crescente, a posição aproximada é $0,90 \times 800 = 720$; caso essa posição não seja inteira, interpola-se linearmente entre os valores adjacentes.

16.1 Métodos de cálculo dos quartis

Existem métodos distintos (e igualmente válidos) para calcular quartis em amostras pequenas:

- **Método exclusivo** (*exclusive*, usado em TI-84, Numpy por padrão): exclui a mediana antes de dividir.
- **Método inclusivo** (*inclusive*, usado no Excel `QUARTIL.INC`): inclui a mediana em ambas as metades.

Isso pode gerar valores ligeiramente diferentes — sem que nenhum esteja “errado”. Em amostras grandes, as diferenças são desprezíveis.

Exemplo 16.2. Para $x = \{3, 5, 8, 10, 14, 16, 20, 22\}$ ($n = 8$, já feito):

- **Exclusivo:** $Q_1 = 6,5$, $Q_3 = 18$.
- **Inclusivo:** a mediana 12 entra em ambas as metades. Metade inferior $\{3, 5, 8, 10, 12\}$: mediana = 8. Metade superior $\{12, 14, 16, 20, 22\}$: mediana = 16. Logo $Q_1 = 8$, $Q_3 = 16$.

A discordância é normal; o importante é declarar o método utilizado.

17 Relação entre Quartis, Decis e Percentis

As separatrizes são casos particulares dos percentis:

$$Q_1 = P_{25}, \quad Q_2 = P_{50}, \quad Q_3 = P_{75}. \quad (18)$$

$$D_1 = P_{10}, \quad D_5 = P_{50}, \quad D_9 = P_{90}. \quad (19)$$

Tabela 2: Equivalências entre separatrizes.

Quartil	Decil	Percentil
Q_1	$D_{2,5}$	P_{25}
Q_2	D_5	P_{50}
Q_3	$D_{7,5}$	P_{75}
—	D_1	P_{10}
—	D_9	P_{90}

Tabela 3: Resumo das medidas de forma.

Medida	Objetivo
Assimetria	Direção da cauda
Curtose	Grau de concentração
Quartis	Divide em 4 partes
Decis	Divide em 10 partes
Percentis	Divide em 100 partes

18 Resumo da Aula

Parte I — Medidas de dispersão:

Tabela 4: Comparação das medidas de dispersão.

Medida	Unidade	Sensível a <i>outliers</i> ?	O que mede
Amplitude	Sim	Muito	Espalhamento total
Desvio médio	Sim	Pouco	Distância média à média
Variância	Unid. ²	Sim	Dispersão quadrática
Desvio padrão	Sim	Sim	Dispersão (mesma unidade)
Coefficiente de variação	%	Sim	Dispersão relativa

Parte II — Medidas de forma e separatrizes:

Principais ideias a reter:

- Medidas de posição e dispersão são *complementares*: média e mediana iguais não implicam distribuições iguais.
- A variância usa o quadrado dos desvios para evitar cancelamento e penalizar grandes desvios; o desvio padrão restaura a unidade original.
- O divisor $n - 1$ na variância amostral: *graus de liberdade* e estimador não viesado.
- O coeficiente de variação é *adimensional*, permitindo comparar variabilidades de unidades distintas (mas exige variável de razão).
- A Regra Empírica (68–95–99,7%) vale apenas para distribuições aproximadamente normais; a Desigualdade de Tchebycheff vale para qualquer forma.
- A assimetria indica a direção da cauda; a curtose, o grau de concentração dos dados.

Tabela 5: Resumo das medidas de forma.

Medida	Objetivo
Assimetria	Direção da cauda
Curtose	Grau de concentração dos dados
Quartis	Divide a distribuição em 4 partes
Decis	Divide a distribuição em 10 partes
Percentis	Divide a distribuição em 100 partes

- Quartis, decis e percentis são casos particulares de uma mesma família de separatrizes.

19 Síntese: análise comparativa completa

Vamos integrar todas as medidas estudadas em uma análise completa de dois conjuntos de notas (Turma A e Turma B), cada uma com $n = 10$ estudantes:

Tabela 6: Notas de duas turmas.

Turma A	4	5	5	6	6	6	7	7	8	9
Turma B	2	3	4	5	6	7	8	9	9	10

Turma A. Ordenada: 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9.

$\sum x = 63 \Rightarrow \bar{x} = 6,3$. Mediana = $(6 + 6)/2 = 6$. Moda = 6.

$\sum x^2 = 16 + 25 + 25 + 36 + 36 + 36 + 49 + 49 + 64 + 81 = 417$.

$s^2 = \frac{1}{9} \left(417 - \frac{63^2}{10} \right) = \frac{1}{9} (417 - 396,9) = \frac{20,1}{9} \approx 2,23 \Rightarrow s \approx 1,49$.

$CV = 1,49/6,3 \approx 23,7\%$.

$Q_1 = 5$; $Q_3 = 7$; $IIQ = 2$; P_{10} (pos 1): ≈ 5 .

Assimetria: média 6,3 > mediana 6 > moda 6 $\Rightarrow$ *levemente* positiva.

Turma B. Ordenada: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 10.

$\sum x = 63 \Rightarrow \bar{x} = 6,3$. Mediana = $(6 + 7)/2 = 6,5$.

Moda = 9 (bimodal fracamente). $\sum x^2 = 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 81 + 100 = 465$.

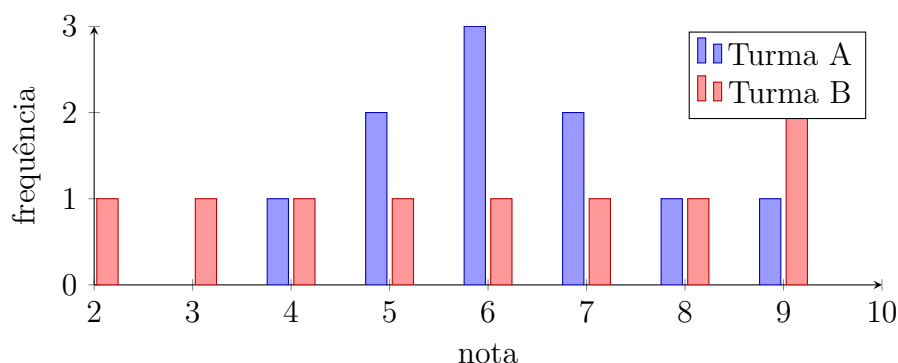
$s^2 = \frac{1}{9} (465 - 396,9) = \frac{68,1}{9} \approx 7,57 \Rightarrow s \approx 2,75$.

$CV = 2,75/6,3 \approx 43,7\%$.

$Q_1 = 4$; $Q_3 = 9$; $IIQ = 5$.

Comparação. Embora as duas turmas tenham *exatamente a mesma média* (6,3), a Turma B apresenta:

- Variância $\approx 3,4$ vezes maior.
- CV quase o dobro (43,7% contra 23,7%) — muito mais heterogênea.
- IIQ muito maior (5 contra 2) — a parte central dos dados é mais espalhada.
- Distribuição *negativamente* assimétrica (moda 9 > mediana 6,5 > média 6,3): poucas notas baixas puxam a média para baixo.



Histograma das duas turmas: mesma média, dispersões muito diferentes.

Observação 19.1. Esse exemplo ilustra o conceito central deste capítulo: **medidas de posição não são suficientes**. Só ao examinar dispersão, assimetria e separatrizes é possível distinguir turmas com médias idênticas.

20 Exercícios Propostos

Lista com graus de dificuldade progressivos. Gabaritos na seção 21.

1. **(Amplitude)** Calcule a amplitude dos dados: 5, 7, 7, 8, 10, 12, 15.
2. **(Desvio médio)** Para $x = \{2, 4, 6, 8\}$, calcule o desvio médio e interprete.
3. **(Variância populacional)** Uma população finita tem valores 1, 3, 5, 7. Calcule σ^2 e σ .
4. **(Variância amostral)** Para a amostra 4, 8, 12, 16, 20, calcule s^2 e s .
5. **(Desvio padrão)** Dados 10, 12, 14, 16, 18, 20, calcule s .
6. **(Coeficiente de variação)** Uma turma A tem $\bar{x} = 50$, $s = 5$. Outra turma B tem $\bar{x} = 200$, $s = 10$. Compare a variabilidade relativa.
7. **(Comparação de amostras)** Duas amostras de resistência elétrica (Ω): $A = \{100, 102, 98, 101, 99\}$ e $B = \{100, 80, 120, 110, 90\}$. Qual é mais homogênea?
8. **(Identificação de assimetria)** Dada média = 8, mediana = 6, moda = 4, classifique a assimetria.
9. **(Interpretação de boxplot)** Em um boxplot, o lado direito da caixa é bem maior que o esquerdo. O que se conclui sobre a distribuição?
10. **(Quartis)** Calcule Q_1 , Q_2 e Q_3 dos dados 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12.
11. **(Decis)** Para os dados do exercício 10, calcule D_1 e D_9 .
12. **(Percentis)** Calcule P_{25} , P_{50} e P_{75} dos dados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e verifique as equivalências.
13. **(Outlier)** Para $Q_1 = 6,5$, $Q_3 = 18$, identifique se 2 e 28 são *outliers*.
14. **(Física Experimental)** Medidas repetidas de um resistor (Ω): 99,7; 100,3; 99,9; 100,1; 100,0. Calcule $\bar{x}$, s e CV e comente a precisão.
15. **(Educação)** Notas de duas turmas: T1 $\bar{x} = 6,0$, $s = 1,2$; T2 $\bar{x} = 6,5$, $s = 2,0$. Compare a dispersão relativa.
16. **(Engenharia)** Amostras de diâmetro (mm): 20,02; 20,05; 19,98; 20,00; 19,95. Determine s e verifique se o processo está dentro de $\bar{x} \pm s$.
17. **(Ciência de Dados)** Dois modelos de regressão têm MAE (erro médio absoluto) 0,8 e 1,2 com desvios padrão 0,2 e 0,4. Qual é mais estável (menor CV)?
18. **(ENEM)** Um candidato obteve nota 720 no percentil 90 da prova de Matemática. Interprete.
19. **(ENEM adaptada)** As notas de 10 estudantes: 300, 400, 500, 500, 600, 600, 600, 700, 800, 900. Calcule mediana, Q_1 , Q_3 e IIQ .

20. **(Vestibular)** Em uma prova fácil, a maioria das notas é alta e poucas são baixas. Classifique a assimetria.
21. **(Regra empírica)** Para $\bar{x} = 70$, $s = 5$ (aproximadamente normal), qual o intervalo que contém 95% das notas?
22. **(Regra empírica)** No mesmo caso, qual porcentagem está entre 65 e 75?
23. **(Graus de liberdade)** Para uma amostra de tamanho $n = 5$ com $\sum x_i = 100$, determine o valor que x_5 deve assumir e explique o conceito.
24. **(Comparação de unidades)** Estaturas em m ($\bar{x} = 1,70$, $s = 0,07$) versus em cm ($\bar{x} = 170$, $s = 7$). Mostre que CV é invariante por mudança de escala.
25. **(Boxplot construído)** Construa o boxplot dos dados 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 30 e identifique *outliers*.
26. **(Revisão integradora)** Para $x = \{1, 2, 4, 5, 8, 10\}$: calcule amplitude, $\bar{x}$, DM , s^2 , s , CV , mediana, Q_1 , Q_3 , P_{10} e classifique a assimetria.
27. **(Desafio)** Mostre algebricamente a igualdade entre as fórmulas direta e a computacional da variância (equação 6).
28. **(Aplicação prática)** Uma empresa mede tempos (min) de execução de uma tarefa: 8, 9, 10, 10, 11, 12, 25. Compare as medidas de dispersão e justifique por que s é mais informativo que a amplitude.
29. **(Dados agrupados)** A distribuição abaixo dá o número de filhos em 50 famílias: 0 filho (5 fam.), 1 (10), 2 (18), 3 (12), 4 (5). Calcule a média, a variância amostral e o CV usando os pontos médios das classes (considere cada valor como ponto médio).
30. **(Tchebycheff)** Para uma variável com $\mu = 50$ e $\sigma = 5$, obtenha um *limite inferior garantido* para a proporção dos dados no intervalo $[40; 60]$. E no intervalo $[35; 65]$?
31. **(Momentos)** Para $x = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, calcule m_2 , m_3 e m_4 (divisor n) e classifique assimetria e curtose relativamente à normal.

21 Gabaritos Comentados

1. $A = 15 - 5 = 10$.
2. $\bar{x} = 5$. Desvios absolutos: 3, 1, 1, 3. $DM = (3 + 1 + 1 + 3)/4 = 2$. Em média, cada observação dista 2 unidades da média.
3. $\mu = 4$. Desvios²: 9, 1, 1, 9 $\Rightarrow \sum = 20$. $\sigma^2 = 20/4 = 5$, $\sigma = \sqrt{5} \approx 2,236$.
4. $\bar{x} = 12$. Desvios²: 64, 16, 0, 16, 64 $\Rightarrow \sum = 160$. $s^2 = 160/(5 - 1) = 40$, $s = \sqrt{40} \approx 6,325$.
5. $\bar{x} = 15$. $\sum x_i^2 = 100 + 144 + 196 + 256 + 324 + 400 = 1420$. $\frac{(\sum x)^2}{n} = \frac{8100}{6} = 1350$. $s^2 = (1420 - 1350)/5 = 14$, $s = \sqrt{14} \approx 3,742$.
6. T1: $CV = 5/50 \cdot 100\% = 10\%$. T2: $CV = 10/200 \cdot 100\% = 5\%$. T2 é relativamente mais homogênea.
7. A: $\bar{x} = 100$, $s \approx 1,58$, $CV \approx 1,58\%$. B: $\bar{x} = 100$, $s \approx 17,3$, $CV \approx 17,3\%$. A é mais homogênea.
8. média > mediana > moda $\Rightarrow$ **assimetria positiva**.
9. Distribuição assimétrica à direita (positiva).
10. $n = 8$. $Q_2 = (5 + 7)/2 = 6$. $Q_1 = (3 + 5)/2 = 4$. $Q_3 = (9 + 10)/2 = 9,5$.
11. D_1 : posição 0,8 $\Rightarrow 2 + 0,8(1) = 2,8$. D_9 : posição 7,2 $\Rightarrow 12 + 0,2(\dots)$ use interpolação: $\approx 11,4$. (Refaça conforme regra adotada em sala.)
12. $n = 9$. P_{25} : pos 2,25 $\Rightarrow 2 + 0,25(1) = 2,25$. P_{50} : pos 4,5 $\Rightarrow 5$. P_{75} : pos 6,75 $\Rightarrow 6 + 0,75(1) = 6,75$. Confira $Q_2 = P_{50} = 5$.
13. $IIQ = 11,5$. Limite inferior = $6,5 - 17,25 < 0$; superior = $18 + 17,25 = 35,25$. Logo nem 2 nem 28 são *outliers*.
14. $\bar{x} = 100,0$, $s \approx 0,249$, $CV \approx 0,25\%$. Processo de alta precisão.
15. T1: $CV \approx 20\%$; T2: $CV \approx 30,8\%$. T1 menos dispersa relativamente.
16. $\bar{x} \approx 20,00$, $s \approx 0,041$. Intervalo $\bar{x} \pm s \approx [19,96, 20,04]$ — todos dentro.
17. Modelo 1: $CV = 0,2/0,8 = 25\%$. Modelo 2: $CV = 0,4/1,2 = 33,3\%$. O primeiro é mais estável.
18. 90% dos candidatos obtiveram nota inferior a 720.
19. Ordenadas: mediana = $(600 + 600)/2 = 600$. Q_1 (pos 2,5): 500. Q_3 (pos 7,5): 700. $IIQ = 200$.
20. Média < mediana < moda $\Rightarrow$ assimetria **negativa**.
21. $\bar{x} \pm 2s = [60; 80]$ contém $\approx 95\%$ das notas.
22. Entre 65 e 75 = $\bar{x} \pm s \Rightarrow \approx 68\%$.

23. Há 4 graus de liberdade; escolhidos 4 valores, x_5 deve satisfazer $\sum x_i = 100 +$ soma dos 4 primeiros. Por exemplo, se $\sum_1^4 = 80$, $x_5 = 20$.
24. Em m: $CV = 0,07/1,70 = 4,12\%$. Em cm: $CV = 7/170 = 4,12\%$. Invariante por mudança de escala.
25. Ordenados: $Q_1 \approx 3$, $Q_3 = 9$ (interpolação), mediana = 6. $IIQ = 6$. Limites: -6 e 18 . Logo 30 é *outlier*.
26. Amplitude = 9; $\bar{x} = 5$; $DM = (4 + 3 + 1 + 0 + 3 + 5)/6 = 16/6 \approx 2,67$; $s^2 = (16 + 9 + 1 + 0 + 9 + 25)/5 = 60/5 = 12$; $s = \sqrt{12} \approx 3,46$; $CV = 69,3\%$; mediana = 4,5; $Q_1 = 2$, $Q_3 = 8$; P_{10} : pos 0,6 $\Rightarrow 1 + 0,6(1) = 1,6$. Assimétrica positiva (média 5 > mediana 4,5 > moda 1).
27. Expanda $\sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - 2\bar{x} \sum x_i + n\bar{x}^2 = \sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2$, utilizando $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$.
28. Amplitude = $25 - 8 = 17$ (fortemente afetada por 25). $s \approx 5,6$, refletindo melhor o espalhamento típico; mediana = 10. A amplitude ignora a existência de seis pontos muito ligados ao centro e isola um *outlier*, enquanto s pondera todos os valores.
29. **Dados agrupados.** $\sum n_i p_i = 0 \cdot 5 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 18 + 3 \cdot 12 + 4 \cdot 5 = 112 \Rightarrow \bar{x} = 2,24$. $\sum n_i p_i^2 = 0 + 10 + 72 + 108 + 80 = 270$. $s^2 = \frac{1}{49} \left(270 - \frac{112^2}{50} \right) = \frac{1}{49} (270 - 250,88) = \frac{19,12}{49} \approx 0,390 \Rightarrow s \approx 0,625$. $CV \approx 27,9\%$.
30. **Tchebycheff.** $[40; 60] = \mu \pm 2\sigma$ ($k = 2$): ao menos $1 - 1/4 = 75\%$. $[35; 65] = \mu \pm 3\sigma$ ($k = 3$): ao menos $1 - 1/9 \approx 88,9\%$.
31. **Momentos.** $\bar{x} = 3$. Desvios $-2, -1, 0, 1, 2$. $m_2 = (4 + 1 + 0 + 1 + 4)/5 = 2$ ($\sigma^2 = 2$). $m_3 = (-8 - 1 + 0 + 1 + 8)/5 = 0 \Rightarrow g_1 = 0$ (simétrica). $m_4 = (16 + 1 + 0 + 1 + 16)/5 = 6,8$, $m_4/\sigma^4 = 6,8/4 = 1,7 < 3 \Rightarrow g_2 = 1,7 - 3 = -1,3 < 0$ (platicúrtica).

Referências

Referências

- [1] BUSSAB, W. O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2017.
- [2] TRIOLA, M. F. **Introdução à Estatística**. 12. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- [3] WONNACOTT, T. H.; WONNACOTT, R. J. **Estatística: Mostrada como Ela É**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- [4] MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.